Apollo模型参考自适应控制MRAC (二)-MRAC例题

下面的例子是我硕士自适应控制课的三个关于 Model Reference Adaptive Control的练习, 我硕士导师上的这门课, 我觉得对于理解自适应控制的原理非常有用, 大家可以先看一下下述的几个例子, 理解一下怎么设计MRAC控制器, Apollo的MRAC包括一阶系统和二阶系统, 下面的几个例子都有涉及, 并且有关于一阶和二阶系统微分方程和状态空间方法是怎么转换的

Adaptive Control

Tutorial 1

Adaptive Controller Derivation using Lyapunov Theory
第一个例子是针对一个一阶系统的, 假设一阶系统的参考模型为

$$\dot{x}_p = a_p x_p + b_p \lambda u \qquad (1)$$

其中a_p, b_p是已知变量, $\lambda \neq 0$, 但是我们不知道其符号.
a) 通过Lyapunov函数的方法设计一个自适应控制器, 使得上述一阶系统可以和参考模型的表现一致, 参考模型的方程为:

$$\dot{x}_m = a_m x_m + b_m r \qquad (2)$$

其中$a_m < 0$, r是参考输入
b) 扩展之前开发的控制器, 使得可以使用另外两个增益γ_x和γ_r来调整参数向量$\theta_x(t)$和$\theta_r(t)$的收敛率 (rate of convergence)

如果实际系统P 的特性可以完全跟随参考模型系统S, 那就意味着当当前状态相同的时候 $x_m = x_p$, 我们希望通过选择$\dot{x}_m = \dot{x}_p$, 结合(1)和(2)
我们可以得出

$$\begin{aligned} u &= \frac{a_m - a_p}{b_p \lambda} x_p + \frac{b_m}{b_p \lambda} r \qquad (3) \\ &= \theta_x^* x_p + \theta_r^* r \qquad (4) \end{aligned}$$

当我们对系统P 使用上述输入u的时候,

$$\dot{x}_p = a_p x_p + b_p\lambda(\frac{a_m - a_p}{b_p\lambda}x_p + \frac{b_m}{b_p\lambda}r) \qquad (5)$$
$$= a_m x_p + b_m r \qquad (6)$$

因为λ未知, 所以θ_x^*和θ_r^*也是未知的, 这意味着我们需要做初始值估计然后根据自适应变化率去修改, 假设我们使用的自适应输入为

$$u = \hat{\theta}_x x_p + \hat{\theta}_r r \qquad (7)$$

同样的我们将上述输入带入系统的状态方程:

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= a_p x_p + b_p\lambda((\hat{\theta}_x - \theta_x^* + \theta_x^*)x_p + (\hat{\theta}_r - \theta_r^* + \theta_r^*)r) \\ &= a_p x_p + b_p\lambda\frac{a_m - a_p}{b_p\lambda}x_p + b_p\lambda\frac{b_m}{b_p\lambda}r + b_p(\tilde{\theta}_x x_p + \tilde{\theta}_r r) \\ &= a_m x_p + b_m r + b_p\lambda(\tilde{\theta}_x x_p + \tilde{\theta}_r r)\end{aligned}$$

其中$\tilde{\theta}_x = \hat{\theta}_x - \theta_r^*$, $\tilde{\theta}_r = \hat{\theta}_r - \theta_r^*$,
我们定义误差状态量$e = x_p - x_m$, 我们可以得到error dynamics的表达式为

$$\dot{e} = a_m e + b_p\lambda(\tilde{\theta}_x x_p + \tilde{\theta}_r r) \qquad (8)$$

为了建立参数调整机制, 我们需要找到合理的Lyapunov函数
我们首先选取Lyapunov函数为如下形式:

$$V\left(e, \tilde{\theta}_x, \tilde{\theta}_r\right) = e^2 + b_p|\lambda|\tilde{\theta}_x^2 + b_p|\lambda|\tilde{\theta}_r^2$$

该函数是正定的, $V\left(e, \tilde{\theta}_x, \tilde{\theta}_r\right) > 0$
为了保证该Lyapunov函数是负半定的, 我们首先对上述V 求导

$$\begin{gathered}\dot{V}\left(e, \tilde{\theta}_x, \tilde{\theta}_r\right) = 2e\dot{e} + 2b_p|\lambda|(\tilde{\theta}_x\dot{\tilde{\theta}}_x + \tilde{\theta}_r\dot{\tilde{\theta}}_r) \\ 2a_m e^2 + 2\tilde{\theta}_x(b_p\lambda e x_p + b_p|\lambda|\dot{\tilde{\theta}}_x) + 2\tilde{\theta}_r(b_p\lambda r + b_p|\lambda|\dot{\tilde{\theta}}_r) \\ = 2a_m e^2\end{gathered}$$

我们选取如下参数

$$\dot{\tilde{\theta}}_x = -\mathrm{sgn}(\lambda) e x_p$$
$$\dot{\tilde{\theta}}_r = -\mathrm{sgn}(\lambda) e r$$

此时$\dot{V}$ 是负半定的, $\dot{V} \leq 0$.

b) 为了能够调整参考变化的变化率, 我们新引入两个变量γ_x和γ_r, 我们重新定义一个正定的Lyapunov函数为以下形式:

$$V = e^2 + \frac{b_p|\lambda|}{\gamma_x}\tilde{\theta}_x^2 + \frac{b_p|\lambda|}{\gamma_r}\tilde{\theta}_r^2$$

对上述Lyapunov函数求导数

$$\dot{V} = 2a_m e^2 + 2\tilde{\theta}_x\left(b_p\lambda e x_p + \frac{b_p|\lambda|}{\gamma_x}\dot{\tilde{\theta}}_x\right) + 2\tilde{\theta}_r\left(b_p\lambda e r + \frac{b_p|\lambda|}{\gamma_r}\dot{\tilde{\theta}}_r\right) =$$
$$2a_m e^2$$

为了使$\dot{V}$ 负半定, 我们选取下述参数变化率

$$\dot{\tilde{\theta}}_x = -\gamma_x \mathrm{sgn}(\lambda) e x_p$$
$$\dot{\tilde{\theta}}_r = -\gamma_r \mathrm{sgn}(\lambda) e r$$

Tutorial 2

Lyapunov for State Space Systems
考虑非线性系统模型

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = a x_1^2 + b x_2 + u$$
$$y = x_1$$

其中状态变量$x_1, x_2 \in R$, 输入$u \in R$, 输出$y \in R$, 参数$a, b \in R$

a) 假设参数a和b已经, 设计状态反馈控制器$\mathrm{u}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$使得上述系统的表现由下述参考模型决定:

$$
\mathrm{y} = \mathrm{G_m(s)u_{ref}} \\
\mathrm{G_m(s)} = \frac{\omega^2}{\mathrm{s}^2 + 2\zeta\omega \mathrm{s} + \omega^2}
$$

b) 基于前述问题, 我们设计自适应控制率, a和b是未知的并且证明系统是稳定的

a) 参考系统是一个标准的二阶系统, 我们定义两个参考模型状态变量$\mathrm{x_{m1}}$和$\mathrm{x_{m2}}$, 他们满足下述关系s:

$$
\dot{\mathrm{x}}_{\mathrm{m1}} = \mathrm{x_{m2}} \\
\dot{\mathrm{x}}_{\mathrm{m2}} = -\omega^2 \mathrm{x_{m1}} - 2\zeta\omega \mathrm{x_{m2}} + \omega^2 \mathrm{u_{ref}}
$$

输入设置为

$$
\mathrm{u} = -\mathrm{a}\mathrm{x}_1^2 - \mathrm{b}\mathrm{x}_2 - \omega^2 \mathrm{x}_1 - 2\zeta\omega \mathrm{x}_2 + \omega^2 \mathrm{u_{ref}}
$$

当对系统采取上述输入的时候

$$
\dot{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathrm{x}}_1 \\ \dot{\mathrm{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{a}\mathrm{x}_1^2 + \mathrm{b}\mathrm{x}_2 + (-\mathrm{a}\mathrm{x}_1^2 - \mathrm{b}\mathrm{x}_2 - \omega^2 \mathrm{x}_1 - 2\zeta\omega \mathrm{x}_2 + \omega^2 \mathrm{u_{ref}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_2 \\ -\omega^2 \mathrm{x}_1 - 2\zeta\omega \mathrm{x}_2 + \omega^2 \mathrm{u_{ref}} \end{bmatrix}
$$

如果参数a和b未知, 我们需要使用他们的估计数值$\hat{\mathrm{a}}$和$\hat{\mathrm{b}}$替代, 因此我们的控制器为

$$
\mathrm{u} = -\hat{\mathrm{a}}\mathrm{x}_1^2 - \hat{\mathrm{b}}\mathrm{x}_2 - \omega^2 \mathrm{x}_1 - 2\zeta\omega \mathrm{x}_2 + \omega^2 \mathrm{u_{ref}}
$$

把(1)带入系统模型

$$
\dot{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_2 \\ \tilde{\mathrm{a}}\mathrm{x}_1^2 - \tilde{\mathrm{b}}\mathrm{x}_2 - \omega^2 \mathrm{x}_1 - 2\zeta\omega \mathrm{x}_2 + \omega^2 \mathrm{u_{ref}} \end{bmatrix}
$$

其中$\tilde{\mathrm{a}} = \mathrm{a} - \hat{\mathrm{a}}$, $\tilde{\mathrm{b}} = \mathrm{b} - \hat{\mathrm{b}}$. 定义误差状态变量为$\mathrm{e} = [\mathrm{e}_1\ \mathrm{e}_2]^{\mathrm{T}} = \mathrm{x} - \mathrm{x_m}$,

我们得到如下的误差等式

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} e_2 \\ \tilde{a}x_1^2 + \tilde{b}x_2 - \omega^2 e_1 - 2\zeta\omega e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{a}x_1^2 + \tilde{b}x_2 \end{bmatrix}$$

我们令$A_m = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & -2\zeta\omega \end{bmatrix}$, $\theta = \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{bmatrix}$

我们选取Lyapunov函数$V\,(e, \tilde{\theta}) = e^T P\, e + \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}$, 其中$P$ 是Lyapunov方程正半定的对称矩阵

$$\begin{aligned} \dot{V}\,(e, \tilde{\theta}) &= e^T P\, \dot{e} + \dot{e}^T P\, e + 2\tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \\ &= e^T P\,(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\zeta w \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{a}x_1^2 + \tilde{b}x_2 \end{bmatrix}) \\ &+ (e^T \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & -2\zeta\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \tilde{a}x_1^2 + \tilde{b}x_2 \end{bmatrix})P\, e + 2\tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \end{aligned}$$

$$\dot{V}\,(e, \tilde{\theta}) = e^T Q e + 2\tilde{\theta}^T \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} P\, e + 2\tilde{\theta}^T (-\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} P\, e) = -e^T Q e \leq 0$$

其中Q是正定矩阵, $P\, A_m + A_m^T P \; = -Q$, 参数变化率为

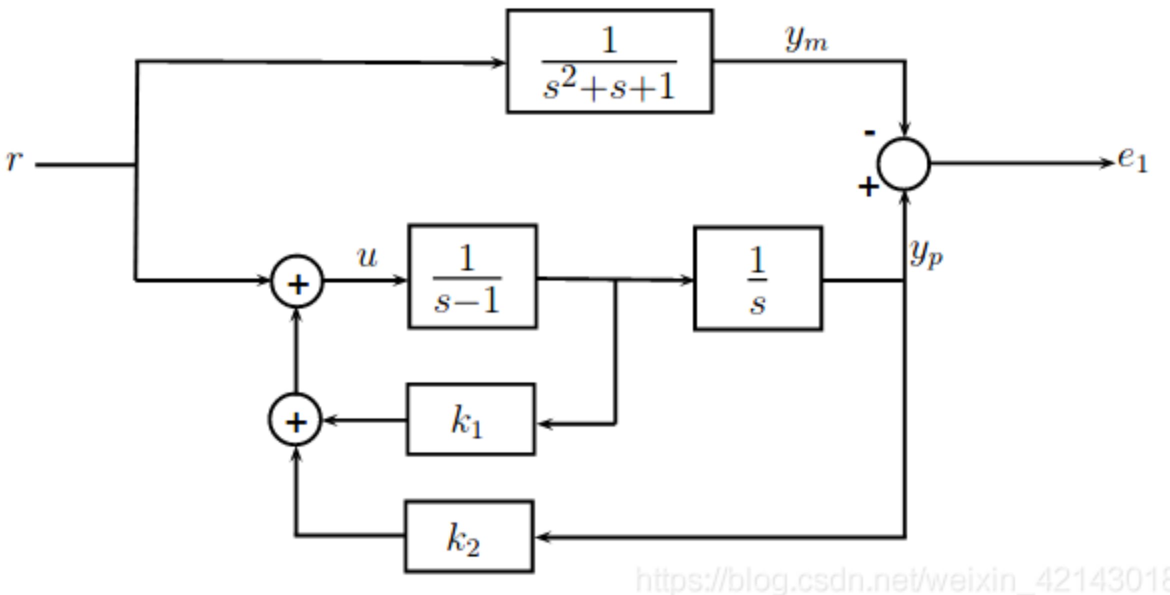
$$\dot{\tilde{\theta}} = -\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} P\, e$$

因为$V\,(e, \tilde{\theta}) > 0$, 并且$\dot{V}\,(e, \tilde{\theta}) \leq 0$, 系统是稳定的

Tutorial 3

Choice of Adaptive Control Law

系统框图如下所示, 我们需要设计参数k_1和k_2的变化率使得输出e_1最终变化为0



a) 根据上述框图画求出参考模型和系统模型的微分方程

b) 把上述微分方程转化为状态空间方程, 求出参考模型系统矩阵$\mathrm{A_m}$, Plant的系统矩阵$\mathrm{A_p}$和向量b

c) 求出矩阵P 的每个元素, 从而使得$\mathrm{A_m^T + P\,A_m = -Q,\ Q = I}$

d) 选择合适的Lyapunov函数和矩阵P , 并且求出参数 $\mathrm{k_1}$和$\mathrm{k_2}$的自适应变化率使得误差$\mathrm{e_1}$可以渐渐变为0.

上述问题和 Apollo 中系统的模型是有很大的相似之处的, 参考系统和实际系统都是二阶系统,并且第二个状态是第一个状态的变化率, 这一点和Apollo的MRAC很相像

a) 参考系统的微分方程为

$$\mathrm{\ddot{y}_m + \dot{y}_m + y_m = r}$$

实际系统的微分方程为

$$\mathrm{\ddot{y}_p + (-1 - k_1)\dot{y}_p + (-k_2)y_p = r}$$

控制器的微分方程为$\mathrm{u = r + k_1\dot{y}_p + k_2 y_p}$

b) 系统的状态方程可以直接从微分方程中得出

参考模型:

$$\mathrm{\dot{x}_m = A_m x_m + br}$$

其中模型的状态量:$\mathrm{x_m} = \begin{bmatrix} \mathrm{y_m} \\ \dot{\mathrm{y}}_\mathrm{m} \end{bmatrix}$, 参考模型的系统矩阵 $\mathrm{A_m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

为了获取系统的状态空间表达式, 我们做下述变换:

$\ddot{\mathrm{y}}_\mathrm{p} + (-1 - \mathrm{k}_1)\dot{\mathrm{y}}_\mathrm{p} + (-\mathrm{k}_2)\mathrm{y_p} = \mathrm{r}, \mathrm{u} = \mathrm{r} + \mathrm{k}_1\dot{\mathrm{y}}_\mathrm{p} + \mathrm{k}_2\mathrm{y_p}$

$\ddot{\mathrm{y}}_\mathrm{p} + (-1 - \mathrm{k}_1)\dot{\mathrm{y}}_\mathrm{p} + (-\mathrm{k}_2)\mathrm{y_p} = \mathrm{u} - \mathrm{k}_1\dot{\mathrm{y}}_\mathrm{p} - \mathrm{k}_2\mathrm{y_p}$

$\ddot{\mathrm{y}}_\mathrm{p} = \mathrm{u} - \mathrm{k}_1\dot{\mathrm{y}}_\mathrm{p} - \mathrm{k}_2\mathrm{y_p} + (1 + \mathrm{k}_1)\dot{\mathrm{y}}_\mathrm{p} + \mathrm{k}_2\mathrm{y_p}$

$\ddot{\mathrm{y}}_\mathrm{p} = \dot{\mathrm{y}}_\mathrm{p} + \mathrm{u}$

系统P 的状态空间表达式为

$$\dot{\mathrm{x}}_\mathrm{p} = \mathrm{A_p x_p} + \mathrm{bu}$$

其中$\mathrm{x_p} = \begin{bmatrix} \mathrm{y_p} \\ \dot{\mathrm{y}}_\mathrm{p} \end{bmatrix}$, $\mathrm{A_p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

控制器的形式为$\mathrm{u} = \mathrm{r} + \theta^\mathrm{T}\mathrm{x_p}$, $\theta^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{k}_2 & \mathrm{k}_1 \end{bmatrix}$

c) 我们需要验证$\mathrm{A_m}$是稳定的

$|\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A_m}| = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

可以推导出$\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

$\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = -0.5$, 由此我们可以看出矩阵$\mathrm{A_m}$是渐进稳定矩阵， 两个实数特征值都位于左半平面

我们选取$\mathrm{Q} = \mathrm{I}$, 然后去求解下述Lyapunov方程

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_2 \\ \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_2 \\ \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解上述方程，我们可以得到$\mathrm{p}_2 = 0.5$, $\mathrm{p}_3 = 1$, $\mathrm{p}_1 = 1.5$.

d) 我们将u的表达式插入系统方程中, 可以得到

$$\dot{\mathrm{x}}_\mathrm{p} = \mathrm{A_p x_p} + \mathrm{b}(\mathrm{r} + \theta^\mathrm{T}\mathrm{x_p})\dot{\mathrm{x}}_\mathrm{p} = (\mathrm{A_p} + \mathrm{b}\theta^\mathrm{T})\mathrm{x_p} + \mathrm{br}$$

根据匹配条件(matching condition) $\mathrm{A_m} = \mathrm{A_p} + \mathrm{b}\theta^{*\mathrm{T}}$, 我们可以得出理想参数值

$$\theta^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$

因为参数是估计得出的, 假设估计参数为$\hat{\theta}$, 则系统方程为

$$\begin{gathered}\dot{x}_p = (A_p + b\hat{\theta}^T)x_p + br \\ \dot{x}_p = (A_p + b\theta^T)x_p + b\theta^{*T}x_p - b\theta^{*T}x_p + br\end{gathered}$$

假设$\tilde{\theta}$为参数误差$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^* = [\tilde{k}_2\ \tilde{k}_1]^T$

$$\begin{gathered}\dot{e} = \dot{x}_p - \dot{x}_m \\ \dot{e} = A_m x_p + b\tilde{\theta}^T x_p + br - A_m x_m - br \\ \dot{e} = A_m e + b\tilde{\theta}^T x_p\end{gathered}$$

我们选取Lyapunov函数: $V\left(e, \tilde{\theta}\right) = e^T P\, e + \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}$
求导数:

$$\dot{V} = e^T P\left(A_m e + b\tilde{\theta}^T x_p\right) + (x_p^T \tilde{\theta} b^T + e^T A_m^T)P\, e + 2\tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}$$

$e^T P\, b\tilde{\theta}^T x_p = x_p^T \tilde{\theta} b^T P\, e = \tilde{\theta}^T x_p e^T P\, b$, 选取自适应变化率为$\dot{\tilde{\theta}} = -x_p e^T P\, b$, 可以得到:

$$\begin{gathered}\dot{V} = e^T\left(P\, A_m + A_m^T P\right)e + 2\tilde{\theta}^T\left(x_p e^T P\, b + \dot{\tilde{\theta}}\right) \\ = -e^T Qq \le 0\end{gathered}$$

最终我们的自适应变化率为

$$\dot{\tilde{\theta}} = \begin{bmatrix}\dot{k}_2 \\ \dot{k}_1\end{bmatrix} = -x_p e^T P\, b = -\begin{bmatrix}y_p \\ \dot{y}_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1 & e_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered}\dot{\tilde{k}}_2 = -\left(\frac{e_1 + 2e_2}{2}\right)y_p \\ \dot{\tilde{k}}_1 = -\left(\frac{e_1 + 2e_2}{2}\right)\dot{y}_p\end{gathered}$$